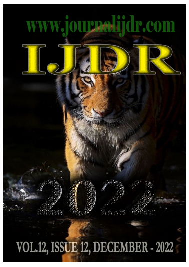
Available online at http://www.journalijdr.com

IJDR

International Journal of Development Research
Vol. 12, Issue, 12, pp. 60811-60813, December, 2022
https://doi.org/10.37118/ijdr.25831.12.2022

ISSN: 2230-9926



RESEARCH ARTICLE **OPEN ACCESS**

AN ALGEBRAIC PARAMETRIZATION OF THE HYPERBOLA AND ITS RELATION TO HYPERBOLIC SINE AND COSINE

[1,*]Odirley Williams Miranda Saraiva, [2]Gustavo Nogueira Dias, [3]Gilberto Emanoel Reis Vogado, [4]Alessandra Epifanio Rodrigues, [5]Fernando Roberto Braga Colares, [6]Cássio Pinho dos Reis, [7]Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior, [8]Flávio Ferreira Barbosa, [9]Herson Oliveira da Rocha, [10]Antonio Thiago Madeira Beirão, [11]Katiane Pereira da Silva and [12]Relinaldo Pinho de Oliveira

[1]Mestrando da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, UNIJUI, Brasil; [2]Prof. Dr. Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Souza, Belém (PA)CEP 68447-000; [3]Prof. Doutor da Universidade do Estado do Pará (PA) Telégrafo CEP 66113-010; [4]Profa Me. da Universidade Federal Rural da Amazônia, Paragominas, Pará Brasil; [5]Prof. Me. da Universidade da Amazônia,(UNAMA), Belém, Pará, Brazil; [6]Prof. Dr. da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul; [7]Prof. Esp. do Colégio Tenente Rêgo Barros; Souza; CEP 68447-000, Belém, Pará, Brasil; [8]Prof. Me. do Colégio Tenente Rêgo Barros; Souza; CEP 68447-000, Belém, Pará, Brasil; [9]Prof. Dr. daUniversidade Federal Rural da Amazônia (UFRA),Parauapebas, PA, Brasil; [10]Prof. Dr. Da Universidade Federal Rural da Amazônia - Campus Belém; [11]Prof. Dra. Da Universidade Federal Rural da Amazônia - Campus Belém. [12]Prof. Me. da Universidade de Santo Amaro, UNISA, Belém, PA

ARTICLE INFO

Article History:
Received 09th September, 2022
Received in revised form
11th October, 2022
Accepted 16th November, 2022
Published online 25th December, 2022

Key Words:

Parametrização, Álgebra, Hipérbole, Cosseno Hiperbólico.

Corresponding author:
Odirley Willians Miranda Saraiva,

ABSTRACT

O estudo diz respeito da parametrização algébrica da hipérbole tratando com a relação com o seno e cosseno hiperbólico. A forma de parametrização escolhida é de caráter estritamente algébrico, evitando assim as manipulações geométricas e oportunizando que as identidades relacionadas ao círculo trigonométrico, sejam aplicadas de forma mais eficaz. Portanto, as identidades são irrelevantes para esta parametrização e sem necessidade se usar matriz de rotação corroborando em utilização de transposições didáticas da geometria analítica.

Copyright©2022, Odirley Willians Miranda Saraiva et al. *This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.*

Citation: ***Odirley Willians Miranda Saraiva, Gustavo Nogueira Dias, Gilberto Emanoel Reis Vogado, Alessandra Epifanio Rodrigues et al. 2022.*** "An Algebraic Parametrization of the Hyperbola and its Relation to Hyperbolic Sine and Cosine*", International Journal of Development Research*, 12, (12), 60811-60813.

INTRODUCTION

Muitas vezes os tratamentos e até os conhecimentos das funções afim, quadrática, polinomial, exponencial, logarítmica e trigonométricas são comuns durante o aprendizado na matemática. Porém, poucas vezes são citadas a existência de outro tipo de funções similares, por exemplo, as hiperbólicas. Normalmente, essas funções hiperbólicas são estudadas em cursos de cálculo diferencial e integral e geralmente apresentadas sem nenhuma relação com a hipérbole e sem nenhuma aplicabilidade (SANTOS, 2015), além de serem apresentadas geralmente sem qualquer evidência de relação com uma hipérbole.

Um exemplo de aplicação pode ser visto em Alhadas (2013), no caso de um fio suspenso por dois postes, que sofre os efeitos da gravidade. Observando a curva formada por esse fio e erroneamente classificando-a como parábola, quando na verdade se trata de uma catenária, que é bem descrito pelo cosseno hiperbólico. Freitas (2015), apresenta outra aplicabilidade. No estudo da catenária, que descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas a ação da gravidade, a tensão interna formada entre os dois pontos extremos dá condições para a construção de várias obras importantes, como por exemplo, a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília, no Brasil. Como se pode ver em Boyer (2003), Dana (1993), Roque

(2012) & Mingoranci (2016), o estudo das hiperbólicas se inicia em meados do século XVI quando Gerhardus Kremer, ou Gerhardus Mercator, como era mais conhecido, planificou o globo terrestre a fim de auxiliar os navegantes. Isso ocorreu de forma tão eficaz que atualmente seu trabalho ainda tem colaborado em navegações por todo o mundo. Porém, muita coisa mudou desde a projeção de Mercator. A dúvida deixada com seu trabalho fez com que outros matemáticos, como Riccati e Lambert, se interessassem pelo assunto, obtivessem fórmulas, propriedades, novas aplicações, etc. Lahmann (1988), descreve uma hipérbole no plano e na sua forma geral, pode ser dada de acordo com a expressão (I),

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1. \tag{1}$$

E, ao observamos esta equação, podemos rearranjá-la da seguinte forma, tal que,

$$x(y)=x_0\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+(y-y_0)^2} \tag{2}$$

Stewart(2013), ao se fazer uma análise da expressão (II), verificou que,

$$\left|\frac{x-x_0}{a}\right|>\left|\frac{y-y}{b}\right|$$

afim de satisfazer a equação (I). Logo, pode ser demonstrado que,

$$x\geq x_0+|a|.$$

Portanto, a equação (I) é satisfeita, desde que, a expressão (II) também o seja. E, como a expressão (I) e (II) estão relacionados com xey, apenas. Temos uma restrição, ou seja,

$$\nexists\, y\in\mathbb{R}, tal\ que\ x<x_0+|a|$$

que satisfaça a equação (I). Na verdade, o que essa desigualdade está mostrando é que existe um intervalo

$$I=]x_0-a,x_0+a[$$

onde os valores da variável y não está definida.

METODOLOGIA

Portanto, o objetivo, agora, é encontrar uma forma de parametrizar a equação da hipérbole tal que, tanto os valores de x como os de y estejam em função de uma variável t e, $t\in\mathbb{R}$. Joseph(1991), propõe que de acordo com a equação (I), podemos fazer uma mudança de variável na equação (I), tal que,

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=w\ e\ \left(\frac{y-y_0}{b}\right)=s.$$

De sorte que, a expressão (I) pode ser reescrita como:

$$w^2-s^2=1 \tag{3}$$

Logo, a expressão (II) pode ser interpretado como o produto da soma pela diferença de dois termos,

$$(w+s)\cdot(w-s)=1 \tag{3}$$

Então, podemos encontrar uma possível solução para a expressão (III) que, de fato, resolva a equação (II). Logo, podemos supor uma solução através de uma função exponencial. Pois, de acordo com Simmons(2009):

$$e^t\cdot e^{-t}=1,\qquad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Então, podemos substituir os valores de $(w+t)=e^t$ e $(w-t)=e^{-t}$,e nesta escolha de qual função exponencial se deva escolher é trivial, (cabe ressaltar que, a análise algébrica nos levaria imediatamente a correta substituição a se fazer), Gonçalves & Flemming (2012), tal que satisfaça a expressão seja verdadeira a expressão dada pelas igualdade (V), como segue,

$$(w+s)\cdot(w-s)=e^t\cdot e^{-t}=e^0=1.$$

Portanto,

$$e^t\cdot e^{-t}=(w+t)\cdot(w-t)=1. \tag{5}$$

Logo, a função exponencial e^t e e^{-t} é uma solução para a expressão (III). Independentemente de qual valores de t a serem escolhidos, desde que $t\in\mathbb{R}$. Portanto, ao relacionarmos os termos das expressões $(IV)e\ (V)$, temos que,

$$w+s=e^t \tag{6}$$

$$w-s=e^{-t} \tag{7}$$

Guidorizzi (2005), Eves (2011), propõe resolver este sistema de equações acima, para encontrar os valores de wes, obtemos,

$$w(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\ e\ s(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

E, como

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=w=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

Podemos utilizar a propriedade transitiva, tal que,

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}.$$

De sorte que,

$$x(t)=x_0+a\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right).$$

E, da mesma forma, pode ser demonstrado que,

$$\left(\frac{y-y_0}{b}\right)=s(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

tal que,

$$\left(\frac{y-y_0}{b}\right)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

Logo, de forma análoga com o que foi feito com $x(t)$, temos,

$$y(t) = y_0 + b\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right).$$

Portanto, provamos de forma estritamente algébrica que, a parametrização da hipérbole pode ser dado por um certo $x(t) e y(t)$, tal que,

$$x(t) = x_0 + a\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right), t \in \mathbb{R}.$$

$$y(t) = y_0 + b\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right), t \in \mathbb{R}.$$

Nada impede que, escolhido um intervalo In qualquer, os pares ordenados $x(t)$ e $y(t)$ possam ser representados por uma certa curva,$\varphi(t), talque$:

$$\varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big).$$

Vale lembra que, a parametrização escolhida, de caráter estritamente algébrico, evita as manipulações geométricas e as identidades relacionadas ao círculo trigonométrico. Logo, as identidades são irrelevantes para esta parametrização e sem necessidade de se usar matriz de rotação e implementos da geometria analítica.

funções	$\sin t$	$\cos t$	$x(t)$	$y(t)$
$f(t)'$	$\cos t$	$-\sin t$	$y(t)$	$x(t)$
$f(t)''$	$-\sin t$	$-\cos t$	$x(t)$	$y(t)$
$f(t)'''$	$-\cos t$	$\sin t$	$y(t)$	$x(t)$
$f(t)^{IV}$	$\sin t$	$\cos t$	$x(t)$	$y(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f(t)^{2n}$	$\pm\sin t$	$\pm\cos t$	$x(t)$	$y(t)$

Demonstração do seno e cosseno hiperbólico em uma Hipérbole equilátera reduzida: Uma importante observação a se fazer em relação a hipérbole equilátera reduzida, é que temos uma agradável propriedade em sua parametrização, tal que,

$$x(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \; e \; y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Uma vez que, $a = b = 1$ $ex_0 = y_0 = 0$. Então, ao utilizarmos o cálculo diferencial em $x(t)$ $ey(t)$, obtemos, que a derivada de $x(t)$ $emrelaçãoat$ é,

$$x'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Porém, como,

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = y(x), então\; x(t)' = y(t)$$

Logo, da mesma forma, ocorre com $y(t)$, tal que

$$y(t)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \leftrightarrow y(t)' = x(t).$$

Segundo Nóbrega (2012) & Simmons (2009) a única diferença entre as derivadas das “funções trigonométricas”, sin te cos t, em relação as derivadas das “funções hiperbólicas” é que os valores das respectivas derivadas hiperbólicas de $x(t)$ $ey(t)$ são sempre positivos, de acordo com a Tabela 1. Logo, pela propriedade em que as derivadas sucessivas oscilam entre uma função e outra quando se parametriza a hipérbole equilátera reduzida, tem uma relação evidente com o que ocorre com as funções do círculo trigonométrico parametrizados por sin te cos t.

Considerações Finais

Pode ser feito uma adaptação para estas parametrizações recebendo agora a simbologia de $x(t)$ = cosh t e $y(t)$ = sinh t. Com a letra h para distinguir das funções trigonométricas. Só uma questão de conveniência mesmo. Logo, as funções ou identidades hiperbólicas estão demonstradas para uma hipérbole equilátera reduzida. Onde, também pode ser feito a dedução da tanh t, denominada de tangente hiperbólica, e representada por

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \tanh\, t = \frac{\sinh t}{\cosh t}.$$

REFERÊNCIAS

Boyer, C. B. (2003).História da Matemática. São Paulo: Edgard Bencher Ltda.

Dana, P. W. (1993). Non Elementary Functions Antiderivatives, Article.

Eves, H. (2011). Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Gauss, C. F. (1798). Disquisitiones Arithmeticae.

Gonçalves, M. B.& Flemming, D. M. (2012). Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície.2ª edição. Ed. Pearson.

Guidorizzi, H. L. (2005). Um Curso de Cálculo, Vol. 1 2, 3 e 4. 5ª ed., Ed. LTC.

Joseph, G. G. (1991). The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pereira, A. S., et al. (2018). *Metodologia da pesquisa científica.* [e-book]. Santa Maria. Ed. UAB/NTE/UFSM.

Lehmann, C. H. (1988). Geometria Analítica. (9a ed.), ed. Globo.

Nóbrega, B. S. (2012). Análise Numérica para Integrais Não elementares.

Roque, T. (2012). Uma visão crítica: Desfazendo mitos e lendas, Editora Zahar.

Simmons, G. F. (2009). Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2, McGraw-Hill.

Stewart, J.(2013). Cálculo, volume II / James Stewart, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning.

Alhadas, M. C (2013). Funções Hiperbólicas no Ensino Médio. Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Santos, J. J. C (2015). Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas. Dissertação apresentada ao Curso de PósGraduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Mingoranci, M. R. C (2015). UMA INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO. Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática.

Freitas, M. B. C. S. B (2015). As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações. Dissertação apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

****